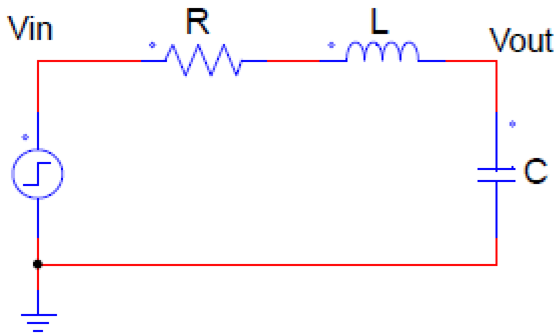
二阶RLC电路分析

作者：Westbrook



$L := 33\mu H$

$f_0 := 18.3kHz$

$C := \dfrac{1}{4\cdot\pi^2\cdot f_0{}^2\cdot L}$

$\omega_0 := \dfrac{1}{\sqrt{L\cdot C}} = 114.982kHz$

$R(Q) := \dfrac{L\cdot\omega_0}{Q}$

$\xi(Q) := \dfrac{R(Q)}{2\cdot L\cdot\omega_0}$

输入输出传递函数

$$H(s,Q) := \frac{1}{\dfrac{s^2}{(\omega_0)^2} + \dfrac{s}{\omega_0\cdot Q} + 1}$$

二阶网络系统的瞬态响应

通过RLC网络的s域传递函数，可以推导出相应的时域响应。在这一过程中，首先需要确定系统输入激励的形式，由于期望得到系统的阶跃响应，所以输入激励的拉斯域表达式为1/s因此可以得到系统响应为：

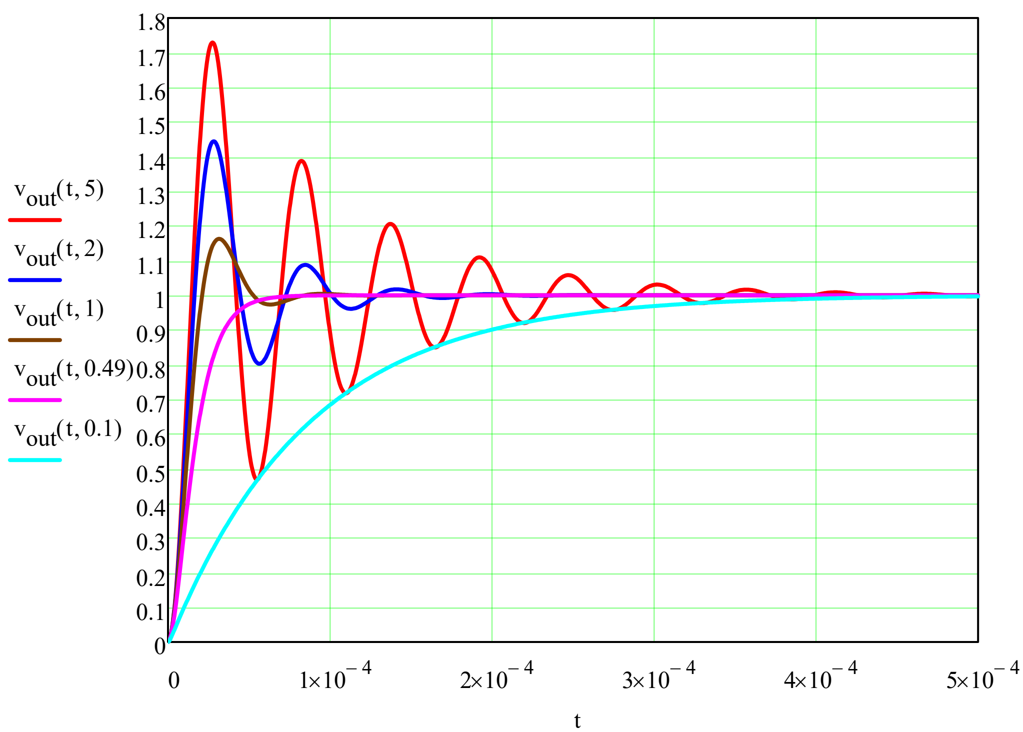
$$v_{out}(s,t,Q) := L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\dfrac{s^2}{(\omega_0)^2} + 2\cdot\xi(Q)\dfrac{s}{\omega_0} + 1}\right]$$

当ξ<1时，上述表达式的结果为：

$$\omega_d(Q) := \omega_0\cdot\sqrt{1 - \xi(Q)^2}$$

$$\theta(Q) := \mathrm{acos}(\xi(Q))$$

$$v_{out}(t,Q) := 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi(Q)^2}}\cdot e^{-\xi(Q)\cdot\omega_0\cdot t}\cdot\sin\left(\omega_d(Q)\cdot t + \theta(Q)\right)$$



Q<0.5或者ξ>1：二次方根的表达式是正的，根是负实数且不重合，解中没有虚数。有完全非振铃的响应，系统过阻尼，这种情况的一种典型电路是两个RC滤波器级联。

Q=0.5或ξ=1：二次方根中等于0，两个根都是负实数且重合，这个系统则被称为临界阻尼。仍然有非振荡响应，因为根中没有出现虚数。

s1,2 = -ω0

Q>0.5或ξ<1：二次方根中的表达式变为负值，两个根都包括虚数部分

：有一个振荡响应，并由于实部的存在而衰减，实部相当于电路中的欧姆损耗。这时的两个极点是具有负实部的共轭复数。

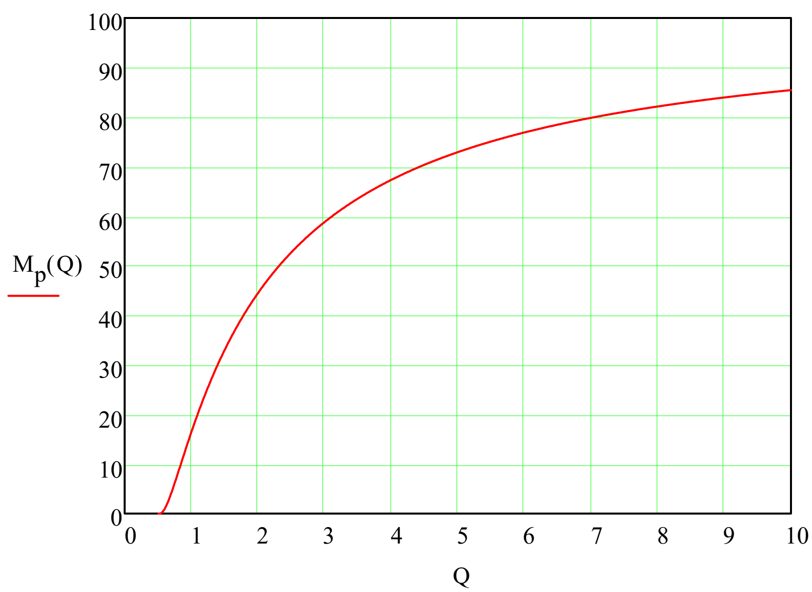
$$s_{1.2} = -\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right) \pm j\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

超调量与Q之间的关系，Q越大，超调量越大

超调量百分比

$$M_p(Q) := e^{-\left(\frac{\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}\right)} \cdot 100$$

Q为无穷大时，或者阻尼比为0，这个时候超调量为100%，即为输入时的两倍



从上图可以看出，Q小于0.5时是没有超调量的；只有当Q>0.5，才会出现超调量，Q越大，超调量越大。

$M_p(2) = 44.434$

$M_p(5) = 72.925$

当品质因数为2（或阻尼比为0.25）时，通过上式计算所得的超调百分比为44%

闭环品质因数与相位裕度之间的关系：

$$Q_c(\varphi_m) := \frac{\sqrt{\cos(\varphi_m)}}{\sin(\varphi_m)}$$

推导见《开关电源控制环路设计》 P82-83

如果已经测得闭环系统的品质因数，这个表达式也同样可以用于求相位裕度

$$\varphi_m(Q_c) := \operatorname{acos}\left(\frac{\sqrt{4Q_c^{\ 2}+1}-1}{2Q_c^{\ 2}}\right)$$